Teorie 10.6.
úterý 15. června 2021 14:41

(1) (c) (i) tvrzení neplatí, stačí zvolit například $f(x,y)=x^2$,

potom $|f(x,y)-f(0,0)| = x^2 \to \infty$ pro $x \to \infty$

(ii) uvažme množinu $K = \overline{U((1,2),3)}$, ta je uzavřená a omezená a tedy kompaktní. Protože $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ jsou funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ omezené na K, tj. existuje $C \in \mathbb{R}$, že $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq C$ na $K \supseteq U((1,2),3)$

Volme $x, y \in U((1,2),3)$, protože vždy platí

$$L = \{(1-\alpha)x + \alpha y : \alpha \in (0,1)\} \subset U((1,2),3)$$

dostáváme podle věty o střední hodnotě $\xi \in L$, že

$$|f(x)-f(y)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi)(x_1-y_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi)(x_2-y_2) \right|$$

$$\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi)\right| |x_1-y_1| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(\xi)\right| |x_2-y_2| \leq \underset{\substack{\shortparallel \\ L}}{2C} |x-y| .$$

Tvrzení tedy platí

(iii) tvrzení opět platí, důkaz je stejný jako u (ii)

(2)(c)(i) Tvrzení neplatí, stačí uvážit $a_n = \frac{1}{2^n}$, $b_n = 1$.

Potom $A = 2$, $B = 1$, ale pro $c_n = a_n + b_n$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2^n}+1}{\frac{1}{2^{n+1}}+1} = 1 < \max(A,B) = 2.$$

(ii) Tvrzení neplatí, stačí uvážit $a_n = 1$, $b_n = -1$,

potom $A = B = 1$, ale mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n$

má poloměr konvergence $\infty > 1 = \min(A,B)$

(iii) neplatí, stejný příklad jako ve (ii)

(iv) platí pro $|x| < \min(A,B)$ platí

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

protože obě řady napravo konvergují.

Tedy $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ má poloměr konvergence minimálně $\min(A,B)$.

(d) opakovaným použitím věty o derivaci mocninné řady dostaneme

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k)\, a_n x^{n-k}$$ a tedy

$f^{(k)}(0) = n!\, a_n$. Taylorova řada pro f se středem v 0

má tedy tvar

$$f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n .$$

(3)(c)(i) tvrzení neplatí, vzíme-li posloupnost $\{a_n\} \subset A$, potom každá konvergentní podposloupnost $\{a_{n_k}\}$ limitu a. Protože $a \notin A$ není $\{a_{n_k}\}$ konvergentní v A jako metrickém prostoru

(ii) Protože $\{a_n\}$ je konvergentní je i omezená a tedy $\subset A$ omezená. Dokážeme, že A je uzavřená, čili stačí ukázat, že $\mathbb{R} \setminus A$ je otevřená.

(sporem) pokud $\mathbb{R} \setminus A$ není otevřená, potom existuje $x \in \mathbb{R} \setminus A$, že platí $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in U(x, \frac{1}{n}) : x_n \in A$.

Standardním postupem tedy zkonstruujeme podposloupnost $a_{n_k} \to x$ a tedy $x = a$, což je spor s předpokladem $x \notin A$.

(iii) neplatí, stačí zvolit $M = [0,1]$ s obvyklou metrikou, $U = (0,1)$. Potom posloupnost $a_n = \frac{1}{n}$ nemá konvergentní podposloupnost s limitou v U.

(iv) tvrzení platí, nechť (M,ρ) je kompaktní, $K \subseteq M$ uzavřená, volme $\{x_n\} \subseteq K$. Potom existuje $x_{n_k} \to x \in M$ a stačí ukázat $x \in K$. Pokud $x \in K$ potom existuje $\delta > 0$, že $U(x,\delta) \subseteq M \setminus K$ (protože $M \setminus K$ je otevřená) to je ale ve sporu s výrokem $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}: x_{n_k} \in U(x,\delta)$.